

11.1

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = -3x^2 + 24x - 11$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \cdot 2x + 24 - 0 \\ &= -6x + 24 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{array}{rcl} -6x + 24 = 0 & & | -24 \\ -6x = -24 & & | :(-6) \\ x = 4 & & \end{array}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdassa 4. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -6x + 24$$

$$f'(0) = -6 \cdot 0 + 24 = 24 > 0 \quad +$$

$$f'(5) = -6 \cdot 5 + 24 = -6 < 0 \quad -$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ f'(x) & + & | & - & \\ f(x) & \nearrow & | & \searrow & \end{array}$$

Funktio f on aidosti kasvava, kun $x \leq 4$, ja aidosti vähenevä, kun $x \geq 4$.

Vastaus

aidosti kasvava, kun $x \leq 4$,

aidosti vähenevä, kun $x \geq 4$

11.2

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = 6x^2 - 84x - 10\,000\,000$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \cdot 2x - 84 - 0 \\ &= 12x - 84 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{array}{rcl} 12x - 84 = 0 & & | +84 \\ 12x = 84 & & | :12 \\ x = 7 & & \end{array}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdassa 7. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 12x - 84$$

$$f'(0) = 12 \cdot 0 - 84 = -84 < 0 \quad -$$

$$f'(10) = 12 \cdot 10 - 84 = 36 > 0 \quad +$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 7 & & \\ f'(x) & - & | & + & \\ f(x) & \searrow & | & \nearrow & \end{array}$$

Funktio f on aidosti kasvava, kun $x \geq 7$, ja aidosti vähenevä, kun $x \leq 7$.

- b) Muuttujan arvot 7,100 001 ja 7,100 002 ovat molemmat kohdan 7 oikealla puolella. Koska funktio f on siellä aidosti kasvava, funktion arvo $f(7,100\,002)$ on suurempi.

Vastaus

- a) aidosti kasvava, kun $x \geq 7$; aidosti vähenevä, kun $x \leq 7$
b) $f(7,100\,002)$

11.3

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 4 + 0 \\&= x^2 - 4\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}x^2 - 4 &= 0 && | +4 \\x^2 &= 4 \\x &= \sqrt{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{4} = -2\end{aligned}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -2 ja 2 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = x^2 - 4$$

$$f'(-3) = 5 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -4 < 0 \quad -$$

$$f'(3) = 5 > 0 \quad +$$

		-2		2	
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

Funktiolla f on maksimikohta $x = -2$ ja minimikohta $x = 2$.

Vastaus

maksimikohta $x = -2$, minimikohta $x = 2$

11.4

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 3 \cdot 2x - 0 \\ &= -3x^2 + 6x \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-3x^2 + 6x = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Erotetaan yhteinen tekijä } x. \\ \text{(Tai ratkaistaan ratkaisukaavalla.)} \end{array}$$

$$x \cdot (-3x + 6) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö.}$$

$$\begin{array}{rcl} x = 0 & \text{tai} & -3x + 6 = 0 \\ & & \quad \quad \quad | -6 \\ & & -3x = -6 \\ & & \quad \quad \quad | :(-3) \\ & & x = 2 \end{array}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 2. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(-1) = -9 < 0 \quad -$$

$$f'(1) = 3 > 0 \quad +$$

$$f'(3) = -9 < 0 \quad -$$

		0		2	
$f'(x)$	-		+		-
$f(x)$	↘		↗		↘
		min		max	

Funktiolla f on minimikohta $x = 0$ ja maksimikohta $x = 2$.

Vastaus

minimikohta $x = 0$, maksimikohta $x = 2$

11.5

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 4. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f'(-1) = 15 > 0 \quad +$$

$$f'(2) = -12 < 0 \quad -$$

$$f'(5) = 15 > 0 \quad +$$

		0		4	
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

Funktio f on kasvava välillä $x \leq 0$ ja välillä $x \geq 4$.

Funktio f on vähenevä välillä $0 \leq x \leq 4$.

- b) Funktion f maksimiarvo on $f(0) = 5$.

Funktion f minimiarvo on $f(4) = -27$.

Vastaus

- a) kasvava välillä $x \leq 0$ ja välillä $x \geq 4$; vähenevä välillä $0 \leq x \leq 4$
b) maksimiarvo $f(0) = 5$, minimiarvo $f(4) = -27$

11.6

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(t) = -10t^3 + 120t^2 + 1000 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(t) = -30t^2 + 240t$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-30t^2 + 240t = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$t = 0 \quad \text{tai} \quad t = 8$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 8. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(t) = -30t^2 + 240t$$

$$f'(-1) = -270 < 0 \quad -$$

$$f'(1) = 210 > 0 \quad +$$

$$f'(10) = -600 < 0 \quad -$$

		0		8		
$f'(x)$	-		+		-	
$f(x)$	\searrow		\nearrow		\searrow	
		min		max		

Kulunut aika t on oltava positiivinen luku. Kulkukaavion perusteella hyönteisten määrä kääntyy laskuun, kun $t = 8$ eli 8 viikon kuluttua.

Lasketaan hyönteisten määrä ajanhetkellä $t = 8$.

$$f(8) = 3560 \approx 3600$$

Vastaus

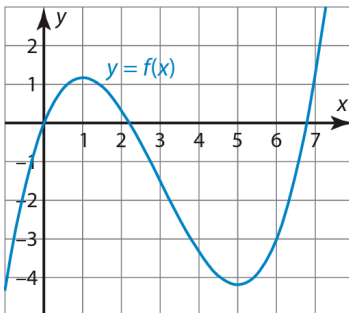
8 viikon kuluttua, hyönteisiä on 3600

11.7

a) Kohdassa $x = 0$ funktion f kuvaaja on nouseva. Siten derivaatan merkki on positiivinen.

b) Kohdassa $x = 1$ funktion f kuvaaja on vaakasuora. Siten derivaatan merkki on nolla.

c) Kohdassa $x = 2$ funktion f kuvaaja on laskeva. Siten derivaatan merkki on negatiivinen.



d) Kohdassa $x = 5$ funktion f kuvaaja on vaakasuora. Siten derivaatan merkki on nolla.

e) Kohdassa $x = 6$ funktion f kuvaaja on nouseva. Siten derivaatan merkki on positiivinen.

f) Kohdassa $x = 7$ funktion f kuvaaja on nouseva. Siten derivaatan merkki on positiivinen.

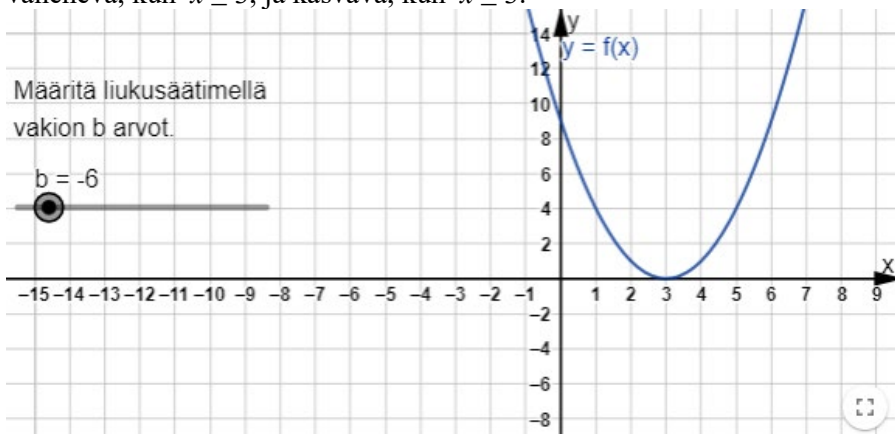
Vastaus

a) positiivinen b) nolla c) negatiivinen

d) nolla e) positiivinen f) positiivinen

11.8

- a) Appletin perusteella vakion b tulee olla -6 , jotta funktio f on vähenevä, kun $x \leq 3$, ja kasvava, kun $x \geq 3$.



- b) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^2 + bx + 9$$

Dericoidaan CAS-laskimella.

$$f'(x) = 2x + b$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2x + b = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -\frac{b}{2}$$

Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdassa $-\frac{b}{2}$.

Koska merkin tulee vaihtua kohdassa 3, on oltava $-\frac{b}{2} = 3$.

Ratkaistaan b .

$$-\frac{b}{2} = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$b = -6$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio, kun $b = -6$, jotta voidaan varmistua funktion oikeasta kulusta. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f'(x) = 2x + b, \text{ missä } b = -6$$

$$f'(0) = -6 < 0 \quad -$$

$$f'(5) = 4 > 0 \quad +$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ f'(x) & - & | & + & \\ f(x) & \searrow & | & \nearrow & \end{array}$$

Funktio f on aidosti vähenevä, kun $x \leq 3$, ja aidosti kasvava, kun $x \geq 3$. Siis saatu arvo $b = -6$ on oikein.

Vastaus

$$b = -6$$




11.9

- a) Derivaatafunktion nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$.

Derivaatafunktion merkki positiivinen (kuvaaja x -akselin yläpuolella), kun $x \leq -1$ tai $x \geq 2$.

Derivaatafunktion merkki on negatiivinen (kuvaaja x -akselin alapuolella), kun $-1 \leq x \leq 2$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

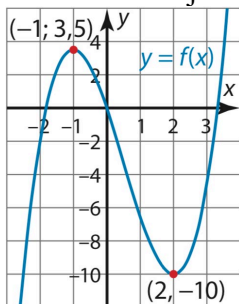
	-1	2	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

- b) Funktio f on kasvava välillä $x \leq -1$ ja välillä $x \geq 2$.

Funktio f on vähenevä välillä $-1 \leq x \leq 2$.

- c) Kulkukaavion perusteella funktion f maksimikohta on $x = -1$ ja minimikohta $x = 2$.

- d) Funktiolla on maksimipiste $(-1; 3,5)$ ja minimipiste $(2, -10)$.
Funktion kuvaaja voi olla esimerkiksi kuvan mukainen.



Vastaus

- b) kasvava välillä $x \leq -1$ ja välillä $x \geq 2$, vähenevä välillä $-1 \leq x \leq 2$
c) maksimikohta $x = -1$, minimikohta $x = 2$

11.10

- a) Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-3x^2 + 18x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-15)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-18 \pm 12}{-6}$$

$$x = \frac{-18 + 12}{-6} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-18 - 12}{-6} = 5$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 1 ja 5. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

$$f'(0) = -15 < 0 \quad -$$

$$f'(2) = 9 > 0 \quad +$$

$$f'(10) = -135 < 0 \quad -$$

		1		5	
f'	-		+		-
f	\searrow		\nearrow		\searrow

Funktio f on kasvava välillä $1 \leq x \leq 5$.

- b)** Funktion arvot kasvavat nopeimmin, kun funktion muutosnopeus on positiivinen ja mahdollisimman suuri. Funktion f muutosnopeuden kertoo derivaattafunktio f' . Pitää määrittää sen suurin arvo.

$$\text{Merkitään } g(x) = f'(x) = -3x^2 + 18x - 15.$$

Funktion $g(x) = -3x^2 + 18x - 15$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen suurin arvo on paraabelin huipussa.

Huipun x -koordinaatti löydetään ratkaisemalla funktion $g(x) = -3x^2 + 18x - 15$ derivaattafunktion nollakohta.

Derivoidaan.

$$g'(x) = -3 \cdot 2x + 18 - 0 = -6x + 18$$

Ratkaistaan nollakohta.

$$\begin{array}{rcl} -6x + 18 = 0 & & | -18 \\ -6x = -18 & & | : (-6) \\ x = 3 & & \end{array}$$

Kohta $x = 3$ sijaitsee välillä, jolla funktio f on kasvava. Siten funktion f arvot kasvavat nopeimmin, kun $x = 3$.

Vastaus

a) $1 \leq x \leq 5$

b) $x = 3$

11.11

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = -7x^2 - 140x - 20\,000$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -7 \cdot 2x - 140 - 0 \\ &= -14x - 140 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} -14x - 140 &= 0 && | +140 \\ -14x &= 140 && | :(-14) \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdassa -10 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -14x - 140$$

$$f'(-15) = -14 \cdot (-15) - 140 = 70 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -14 \cdot 0 - 140 = -140 < 0 \quad -$$

$$\begin{array}{ccccc} & & -10 & & \\ f'(x) & + & | & - & \\ f(x) & \nearrow & | & \searrow & \end{array}$$

Funktio f on aidosti kasvava, kun $x \leq -10$, ja aidosti vähenevä, kun $x \geq -10$.

- b)** Muuttujan arvot $-10,02$ ja $-10,01$ ovat molemmat kohdan -10 vasemmalla puolella. Koska funktio f on siellä aidosti kasvava, funktion arvo $f(-10,01)$ on suurempi.

Muuttujan arvot $-9,9999$ ja $-9,9998$ ovat molemmat kohdan -10 oikealla puolella. Koska funktio f on siellä aidosti vähenevä, funktion arvo $f(-9,9999)$ on suurempi.

Vastaus

a) aidosti kasvava, kun $x \geq 7$; aidosti vähenevä, kun $x \leq 7$

b) $f(-10,01)$ ja $f(-9,9999)$

11.12

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 6x = 0$$

Erötetään yhteinen tekijä x .

(Tai ratkaistaan ratkaisukaavalla.)

$$x \cdot (3x + 6) = 0$$

Tulon nollasääntö.

$$x = 0 \quad \text{tai}$$

$$3x + 6 = 0$$

$$|-6$$

$$3x = -6 \quad |:3$$

$$x = -2$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -2 ja 0 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(-3) = 9 > 0 \quad +$$

$$f'(-1) = -3 < 0 \quad -$$

$$f'(1) = 9 > 0 \quad +$$

		-2		0	
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$
$f(x)$	\nearrow	$ $	\searrow	$ $	\nearrow
		max		min	

Funktiolla f on maksimikohta $x = -2$ ja minimikohta $x = 0$.

Vastaus

maksimikohta $x = -2$, minimikohta $x = 0$

11.13

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = -3x^2 + x + 2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-3x^2 + x + 2 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $-\frac{2}{3}$ ja 1 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -3x^2 + x + 2$$

$$f'(-1) = -2 < 0 \quad -$$

$$f'(0) = 2 > 0 \quad +$$

$$f'(2) = -8 < 0 \quad -$$

		$-\frac{2}{3}$		1	
$f'(x)$	-		+		-
$f(x)$	\searrow		\nearrow		\searrow
		min		max	

Funktio f on kasvava välillä $-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$.

Funktio f on vähenevä välillä $x \leq -\frac{2}{3}$ ja välillä $x \geq 1$.

b) Funktion f minimiarvo on $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{49}{27}$.

Funktion f maksimiarvo on $f(1) = \frac{1}{2}$.

Vastaus

a) kasvava välillä $-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$; vähenevä välillä $x \leq -\frac{2}{3}$ ja välillä $x \geq 1$

b) minimiarvo $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{49}{27}$; maksimiarvo $f(1) = \frac{1}{2}$

11.14

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 + 18x - 24 = 0 \quad | :6$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -4 ja 1 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$$

$$f'(-5) = 36 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -24 < 0 \quad -$$

$$f'(2) = 36 > 0 \quad +$$

		-4		1	
f'	+		-		+
f	↗		↘		↗
		max		min	

Funktio f on aidosti kasvava välillä $x \leq -4$ ja välillä $x \geq 1$.

Funktio f on aidosti vähenevä välillä $-4 \leq x \leq 1$.

b) Funktion maksimikohta on $x = -4$ ja minimikohta $x = 1$.

Vastaus

a) aidosti kasvava välillä $x \leq -4$ ja välillä $x \geq 1$,

aidosti vähenevä, kun $-4 \leq x \leq 1$

b) maksimikohta $x = -4$, minimikohta $x = 1$

11.15

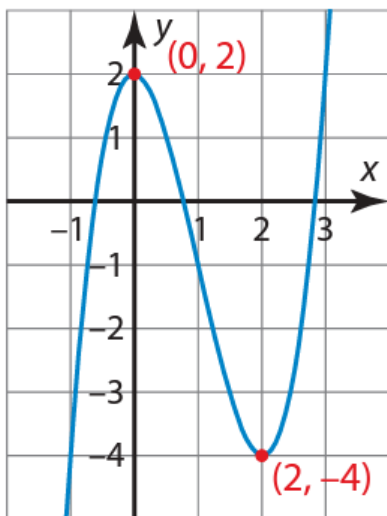
Täydennetään derivaattafunktion f' merkkikaavio funktion f kulkukaavioksi.

		0		2	
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

Koska $f(0) = 2$, funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta. Tämä on kulkukaavion perusteella funktion maksimipiste.

Koska $f(2) = -4$, funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(2, -4)$ kautta. Tämä on kulkukaavion perusteella funktion minimipiste.

Hahmotellaan näiden pisteiden ja kulkukaavion perusteella funktion f kuvaaja. Esimerkiksi:



11.16

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Ratkaistaan derivaattafunktion $f'(x) = x^2 + x - 6$ nollakohdat.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-5}{2} = -3$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -3 ja 2 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

$$f'(-4) = 6 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -6 < 0 \quad -$$

$$f'(3) = 6 > 0 \quad +$$

		-3		2	
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$
$f(x)$	\nearrow	$ $	\searrow	$ $	\nearrow

Muuttujan x arvot -2 ja 1 kuuluvat molemmat välillä $-3 \leq x \leq 2$, missä funktio f on aidosti vähenevä. Siten $f(-2) > f(1)$.

Vastaus

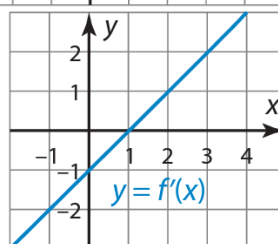
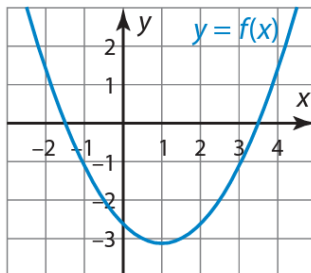
$$f(-2)$$

11.17

- a) Funktio f on vähenevä, kun $x < 1$, ja kasvava, kun $x > 1$.

Siten derivaattafunktion merkki on negatiivinen, kun $x < 1$ ja positiivinen, kun $x > 1$.

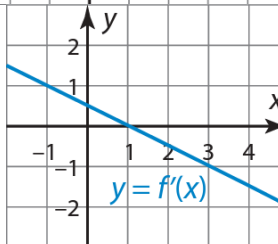
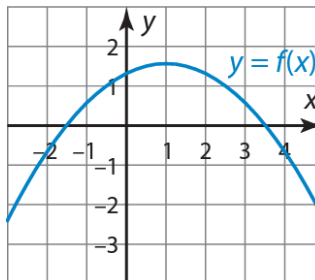
Oikea derivaattafunktion kuvaaja on vaihtoehto 3.



- b) Funktio f on kasvava, kun $x < 1$, ja vähenevä, kun $x > 1$.

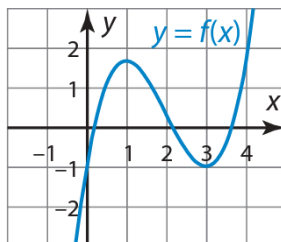
Siten derivaattafunktion merkki on positiivinen, kun $x < 1$ ja negatiivinen, kun $x > 1$.

Oikea derivaattafunktion kuvaaja on vaihtoehto 1.

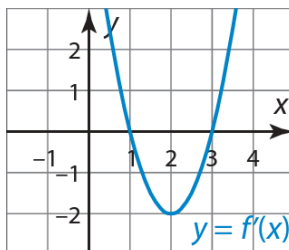


- c) Funktio f on kasvava, kun $x < 1$, ja kun $x > 3$. Funktio f on vähenevä välillä $1 < x < 3$.

Siten derivaattafunktion merkki on positiivinen, kun $x < 1$, ja kun $x > 3$. Merkki on negatiivinen, kun $1 < x < 3$.

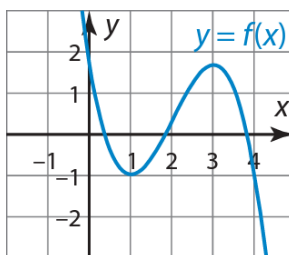


Oikea derivaattafunktion kuvaaja on vaihtoehto 4.

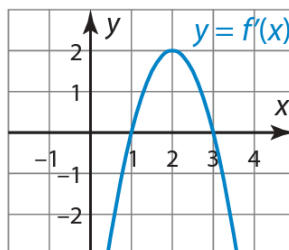


- d) Funktio f on vähenevä, kun $x < 1$, ja kun $x > 3$. Funktio f on kasvava välillä $1 < x < 3$.

Siten derivaattafunktion merkki on negatiivinen, kun $x < 1$, ja kun $x > 3$. Merkki on positiivinen, kun $1 < x < 3$.

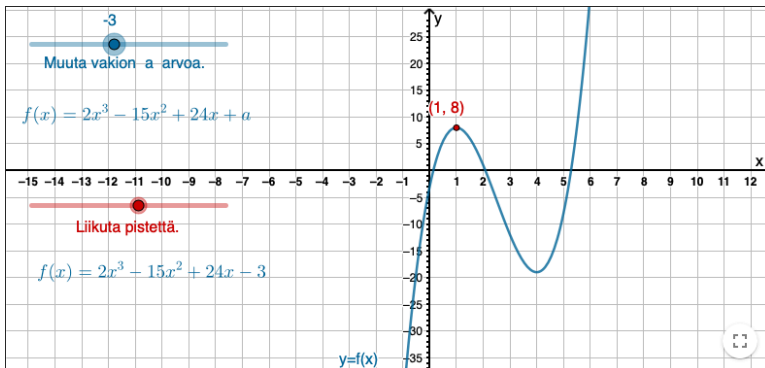


Oikea derivaattafunktion kuvaaja on vaihtoehto 2.



11.18

- a) Appletin perusteella funktiolla on maksimiarvo 8, kun $a = -3$.



- b) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + a \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 - 30x + 24 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 1 ja 4. Päättellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$$

$$f'(0) = 24 > 0 \quad +$$

$$f'(2) = -12 < 0 \quad -$$

$$f'(5) = 24 > 0 \quad +$$

		1		4	
f'	+		-		+
f	↗		↘		↗
		max		min	

Funktion f maksimikohta on $x = 1$. On siis oltava $f(1) = 8$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + a = 8$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = -3$$

Funktion f minimiarvo on $f(4) = 2 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 3 = -19$.

Vastaus

$$a = -3$$

11.19

- a) Määritetään funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

Koska $\sqrt{-8}$ ei ole määritelty, derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia.

- b) Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska funktiolla ei ole nollakohtia, on paraabeli kokonaan x -akselin yläpuolella. Siten derivaattafunktion f' kaikki arvot ovat positiivisia.

Koska $f'(x) > 0$ kaikilla x , funktio f on aidosti kasvava.

- c) Funktion f arvojen muutosnopeuden ilmaisee derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se saa pienimmän arvonsa huipussa. Huipun sijainti saadaan selville määrittämällä derivaatan nollakohta.

Määritetään derivaatan $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ derivaatta.

$$f''(x) = 3 \cdot 2x - 2 + 0 = 6x - 2$$

Ratkaistaan nollakohta.

$$6x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$6x = 2 \quad | :6$$

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Derivaattafunktion f' pienin arvo on kohdassa $x = \frac{1}{3}$.

Vastaus

a) ei nollakohtia

c) $x = \frac{1}{3}$

11.20

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$s(t) = -0,01t^3 + 0,21t^2 + 1 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$s'(t) = -0,03t^2 + 0,42t$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-0,03t^2 + 0,42t = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$t = 0 \quad \text{tai} \quad t = 14$$

Laaditaan funktion s kulkukaavio. Derivaattafunktion s' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 14. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$s'(t) = -0,03t^2 + 0,42t$$

$$s'(-1) = -0,45 < 0 \quad -$$

$$s'(10) = 1,2 > 0 \quad +$$

$$s'(15) = -0,45 < 0 \quad -$$

		0		14	
$s'(t)$	—		+		—
$s(t)$	↘		↗		↘
		max		min	

Kulkukaavion mukaan määrä kääntyy laskuun 14. päivän kohdalla.

b) Lasketaan sairastavien osuus 14. päivänä.

$$s(14) = -0,01 \cdot 14^3 + 0,21 \cdot 14^2 + 1 \approx 15 \text{ (\%)}$$

Väestöstä on enimmillään sairaana 15 %.

c) Lukumäärän lisääntymisnopeus on määrän derivaatta

$$s'(t) = -0,03t^2 + 0,42t.$$

Derivaatan $s'(t) = -0,03t^2 + 0,42t$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa huipussa. Huipun sijainti saadaan selville määrittämällä derivaatan nollakohta.

Määritetään derivaatan derivaatta.

$$s'(t) = -0,03t^2 + 0,42t \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$s''(t) = -0,06t + 0,42$$

Ratkaistaan nollakohta.

$$-0,06t + 0,42 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$t = 7$$

Kasvunopeus on suurimmillaan, kun $t = 7$.

Lasketaan kasvunopeus ajanhetkellä $t = 7$.

$$s'(7) = -0,03 \cdot 7^2 + 0,42 \cdot 7 \approx 1,5 \text{ (prosenttiyksikköä / vrk)}$$

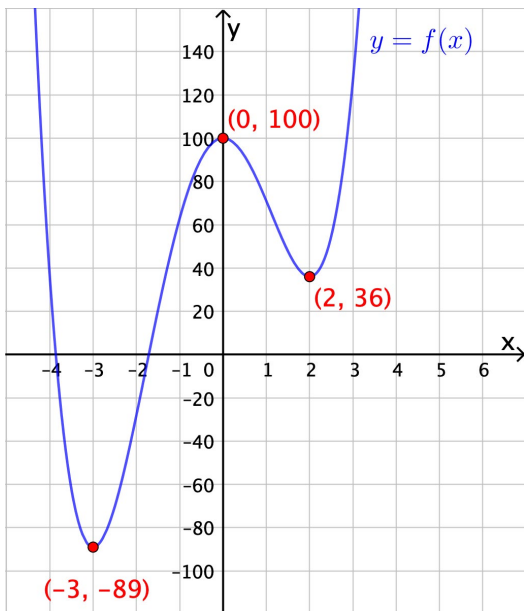
Vastaus

a) 14 vuorokauden kuluttua **b)** 15 %

c) 7 vuorokauden kuluttua, 1,5 prosenttiyksikköä vuorokaudessa

11.21

- a) Piirretään funktion kuvaaja GeoGebralla. Määritetään funktion ääriarvot käyttäen **Ääriarvot**-työkalua.



Funktion f maksimiarvo on $f(0) = 100$.

Funktion f minimiarvot ovat $f(-3) = -89$ ja $f(2) = 36$.

b) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$12x^3 + 12x^2 - 72x = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -3 , 0 ja 2 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$f'(-4) = -288 < 0 \quad -$$

$$f'(-1) = 72 > 0 \quad +$$

$$f'(1) = -48 < 0 \quad -$$

$$f'(4) = 672 > 0 \quad +$$

		-3		0		2	
f'	-		+		-		+
f	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow
		min		max		min	

Funktion f maksimiarvo on $f(0) = 100$.

Funktion f minimiarvot ovat $f(-3) = -89$ ja $f(2) = 36$.

Vastaus

maksimiarvo $f(0) = 100$,

minimiarvot $f(-3) = -89$ ja $f(2) = 36$

11.21

1. Merkkikaavion mukaan derivaattafunktion nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$. Siis $p'(x) = 0$, kun $x = -1$, ja kun $x = 2$.
2. Koska kuvaaja kulkee origon eli pisteen $(0, 0)$ kautta, on $p(0) = 0$.

$$\begin{aligned}p(0) &= 0 & p(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 0 \\d &= 0\end{aligned}$$

Koska $d = 0$, on $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Koska kuvaaja kulkee pisteen $(-1, 1)$ kautta, on $p(-1) = 1$.

$$\begin{aligned}p(-1) &= 1 \\a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) &= 1 \\-a + b - c &= 1\end{aligned}$$

Koska kuvaaja kulkee pisteen $(2, -20)$ kautta, on $p(2) = -20$.

$$\begin{aligned}p(2) &= -20 \\a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 &= -20 \\8a + 4b + 2c &= -20\end{aligned}$$

Koska tuntemattomia on kolme (a , b ja c) tarvitaan vielä kolmas yhtälö.

Muodostetaan kolmas yhtälö a-kohdan tiedon $p'(2) = 0$ perusteella.
(Yhtä hyvin voi käyttää tietoa $p'(-1) = 0$)

Derivoidaan funktio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Muodostetaan yhtälö $p'(2) = 0$.

$$p'(2) = 0$$

$$3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0$$

$$12a + 4b + c = 0$$

Muodostetaan saaduista kolmesta yhtälöstä yhtälöryhmä ja ratkaistaan a , b ja c .

$$\begin{cases} -a + b - c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = -20 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 2, b = -3 \text{ ja } c = -12$$

Funktio

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x.$$

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

3. Määritetään derivaattafunktio.

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

$$p'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Vastaus

a) $x = -1$ ja $x = 2$

b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

c) $p'(x) = 6x^2 - 6x - 12$